2. *Алексеев А.В., Борисов А.Н. и др.* Интеллектуальные системы принятия проектных решений. – Рига: Зинатне, 1997. – 320 с.

3. *Норенков И.П.* Системы автоматизированного проектирования. Кн. 1. Принципы построения и структура. –М.: Высшая школа, 1986. – 127 с.

4. *Янковская Т.А.* Математическое моделирование процесса вибродиагностирования технического состояния горного оборудования // Хвойные бореальной зоны. 2012. XXX. №5-6. С. 85-88.

5. *Янковская Т.А., Михайленко А.В., Мигунов В.И., Демченко И.И.* Программный комплекс диагностики технического состояния горного оборудования (версия 1.0):свидетельство № 2012619062 об официальной регистрации программы для ЭВМ РФ: опубл. 05.10.2012.

On the basis of structural-parametric synthesis in Designing complex technical systems

Tatiana Alexandrovna Jankovskaja, Candidate of physico-mathematical sciences, Associate Professor
Siberian federal university, Krasnoyarsk

The paper is considered the formulation and formalization of combinatorial optimization problems.Gives a classification problems of structural design and specify their characteristics.

Keywords: system structure, synthesis, optimization, methods, mathematical modeling tasks.

УДК 519.21

ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК GERT-СЕТИ НА ОСНОВЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

***Михаил Георгиевич Доррер**, к.т.н., доцент кафедры бизнес-информатики*
Тел.: +7 913 5344181, e-mail: mdorrer@mail.ru
***Антон Александрович Зырянов**, аспирант*
Тел.: +7 908 2075060, e-mail: AntonZyryanov@mail.ru
ФГБОУ ВПО «Сибирский Государственный Технологический Университет» (СибГТУ)
http://www.sibgtu.ru

Рассматривается аналитический метод оценки числовых характеристик однородной GERT-сети, в частности математического ожидания и дисперсии. Метод основан на преобразовании GERT-сети к эквивалентной дуге с пересчетом числовых характеристик случайных величин дуг по предложенным формулам.

Ключевые слова: GERT, стохастические сети, бизнес-процесс, эквивалентное преобразование.

Введение

За последние годы для моделирования и оптимизации технических систем все большее распространение получают альтернативные стохастические сети [1], в частности математический аппарат GERT-сетей (GERT−graphical evaluation and reviewtechnique).

Подробное описание GERT-сетей представлено в работах Филлипса [2], Neumann [3], Pritsker [4]. В отечественной литературе наибольших научных результатов в развитии аппарата GERT-сетей достиг А.П. Шибанов [5].

Математический аппарат GERT-сетей является одним из инструментов исследования различных классов систем. В настоящее время известны применения аппарата GERT-сетей для исследования вероятностно-временных характеристик локальных сетей, сетей передачи данных, телекоммуникационных систем, моделирования распределенных систем обработки информации, оптимизации производственных процессов, моделирования мультиверсионных программных систем. Авторы применяют аппарат GERT-сетей для моделирования системы бизнес-процессов [6, 7].

М.Г. Доррер

Основные методы расчёта GERT-сетей описаны в работах [2, 3, 4, 5]. Данные методы позволяют: преобразовать сеть к эквивалентной дуге; рассчитать вероятность стока сети; определить значения переменных, связанных с моментами распределения выходной величины сети (математическое ожидание, дисперсия и др.); построить функцию распределения выходной величины сети.

Кроме того, в работе Филлипса [2] говорится, что цель использования GERT-сетей состоит в вычислении математического ожидания и дисперсии времени выполнения сети (числовые характеристики могут быть рассчитаны по любому аддитивному параметру) и вероятности выполнения стока (стоков). Анализ работ других авторов [4, 5, 6] показывает, что в большинстве практических примеров также рассчитываются числовые характеристики GERT-сети. Числовые характеристики GERT-сети могут быть использованы для оптимизации, проектирования системы, мониторинга показателей и т.д. Таким образом, актуальным является нахождение числовых характеристик GERT-сетей.

А.А. Зырянов

Однако серьёзным сдерживающим фактором применения GERT-сетей является экспоненциальная трудоёмкость алгоритмов расчета [5], основанных на использовании топологического уравнения Мейсона [2], что характерно для классической теории GERT-сетей. При решении данной задачи известными методами возникает проблема вычислительной сложности – необходимо находить петли сети вплоть до r-ого порядка (число слагаемых в уравнении Мейсона пропорционально числу всевозможных комбинаций петель первого порядка, не имеющих общих вершин), необходимо вычислять частные производные по производящей функции моментов GERT-сети и т.д.

Данную задачу решает Шибанов А. П. [5] – им разработаны методы и алгоритмы нахождения плотности распределения времени прохождения однородной GERT-сети большой размерности на основе эквивалентных упрощающих преобразований. Тем не менее, методы и алгоритмы, предложенные Шибановым [5] являются численными и направлены на нахождение плотности распределения GERT-сети.

Таким образом, актуальной является задача разработки аналитического метода оценки числовых характеристик моментов (математического ожидания и дисперсии) случайной величины стока (в общем случае – стоков) GERT-сети на основе числовых характеристик случайных величин дуг сети минуя решение топологического уравнения Мейсона.

Постановка задачи

GERT-сети являются вариантом полумарковских моделей, но случайные величины в них характеризуется не только дисперсией, но и законом распределения [5]. Дуга $<i,j>$ GERT-сети задается вероятностью p_{ij} и производящей функцией моментов $M_{ij}(s)$.

Производящая функция моментов – двустороннее преобразование Лапласа распределения случайной величины. По определению производящей функции моментов $M_{ij}(s)$, $M_{ij}(0)=1$ при $s=0$. Поскольку $W_E(s)=p_E M_E(s)$, то при $s=0$ $W_E(0)=p_E M_E(0)=p_E$, откуда следует, что $M_E(s)=W_E(s)/p_E=W_E(s)/W_E(0)$, где $W_E(s)$ – эквивалентная W-функция для GERT-сети. Тогда, вычисляя k-ю частную производную по s производящей функции моментов $M_{ij}(s)$ при $s=0$, находим k-ый момент случайной величины:

$$M[Y]=\mu_{kE}=\frac{\partial^k}{\partial s^k}[M_E(s)]\Big|_{s=0} \quad (1)$$

В частности, первый момент μ_{1E} относительно начала координат есть математическое ожидание для случайной величины Y сети, а дисперсия случайной величины Y равна разности между μ_{2E} и квадратом величины μ_{1E}

$$D[Y]=\mu_{2E}-(\mu_{1E})^2=\frac{\partial^2}{\partial s^2}[M_E(s)]\Big|_{s=0}-\left(\frac{\partial}{\partial s}[M_E(s)]\Big|_{s=0}\right)^2 \quad (2)$$

Даны две дуги GERT-сети, характеризующиеся случайными величинами X_1 и X_2, у которых заданы производящие функции моментов – $M_1(s)$ для X_1, $M_2(s)$ для X_2. Для случайных величин X_1 и X_2 по (1), (2) можно найти числовые характеристики соответственно – математическое ожидание $M[X_i]$ и дисперсия $D[X_i]$. Поскольку GERT-сеть может быть заменена одной эквивалентной дугой [4], следовательно, может быть найдена случайная величина Y, характеризующая сток GERT-сети. Известно, что производящие функции моментов для трех базовых эквивалентных преобразований дуг имеют следующую форму [2, 4]:

Последовательные дуги:

$$M_E(s)=W_E(s)/p_E=\frac{p_1M_1(s)p_2M_2(s)}{p_1p_2}=M_1(s)M_2(s) \quad (3)$$

Параллельные дуги:

$$M_E(s)=W_E(s)/p_E=\frac{p_1M_1(s)+p_2M_2(s)}{p_1+p_2} \quad (4)$$

Дуга и петля:

$$M_E(s)=W_E(s)/p_E=\frac{p_1M_1(s)}{1-p_2M_2(s)}\cdot\frac{1-p_2}{p_1}=\frac{(1-p_2)M_1(s)}{1-p_2M_2(s)} \quad (5)$$

Необходимо найти числовые характеристики $M[Y]$ и $D[Y]$ случайной величины Y GERT-сети равной комбинации случайных величин X_1 и X_2 для трех базовых эквивалентных преобразования дуг – последовательные (3), параллельные (4), дуга и петля (5). При этом числовые характеристики $M[Y]$ и $D[Y]$ должны быть найдены в аналитическом виде через комбинацию соответствующих $M[X_i]$ и $D[X_i]$ случайных величин X_1 и X_2.

Кроме того, необходимо разработать эффективный алгоритм эквивалентных преобразований GERT-сети к одной дуге для пересчета числовых характеристик дуг.

Оценка числовых характеристик GERT-сети

Решение поставленной задачи нахождения числовых характеристик GERT-сети без использования топологического уравнения Мейсона [2] и вычисления частных производных основывается на преобразовании GERT-сети к эквивалентной дуге с пересчетом числовых характеристик случайных величин дуг.

Приведем формулы нахождения числовых характеристик для трех преобразований.

Последовательные дуги:

$$M[Y] = M[X_1] + M[X_2] \tag{6}$$

$$D[Y] = D[X_1] + D[X_2] \tag{7}$$

Параллельные дуги:

$$M[Y] = \frac{p_1 M[X_1] + p_2 M[X_2]}{p_1 + p_2} \tag{8}$$

$$D[Y] = \frac{p_1 D[X_1] + p_2 D[X_2]}{p_1 + p_2} + \frac{p_1 p_2 (M[X_1] - M[X_2])^2}{(p_1 + p_2)^2} \tag{9}$$

Дуга и петля:

$$M[Y] = M[X_1] + \frac{p_2}{1 - p_2} M[X_2] \tag{10}$$

$$D[Y] = D[X_1] + \frac{p_2}{1 - p_2} D[X_2] + \frac{p_2}{(p_2 - 1)^2} (M[X_2])^2 \tag{11}$$

X_1 и X_2 – случайные величины дуг GERT-сети, Y – случайная величина стока GERT-сети, p_1 и p_2 – вероятности выполнения соответственно дуг $X1$ и $X2$. Поскольку в GERT-сети все случайные величины независимы, то они также являются некоррелированными.

Данные формулы получены путем аналитического вычисления частных производных (1), (2), используя свойства производных, по производящим функциям моментов для эквивалентной дуги GERT-сети для трех базовых преобразований. Далее покажем вывод формул (6-11).

Рассмотрим простую GERT-сеть с двумя последовательными дугами, описываемыми случайными величинами X_1 и X_2, Рис. 1.

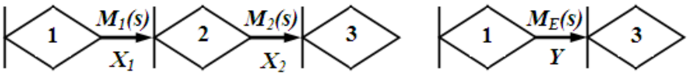

Рис. 1. Последовательные дуги и их эквивалентное представление

Тогда, аналитически вычисляя частную производную (1) по производящей функции моментов (3) для эквивалентной дуги $<1,3>$ (Рис. 1) при $s = 0$, получим

$$M[Y] = \mu_{1E} = \frac{\partial}{\partial s}[M_E(s)]\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}[M_1(s) M_2(s)] = M_2(s)\frac{\partial}{\partial s}M_1(s) +$$
$$+ M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s) = \frac{\partial}{\partial s}M_1(s) + \frac{\partial}{\partial s}M_2(s) = M[X_1] + M[X_2]$$

Аналитически вычисляя частные производные (2) по производящей функции моментов (3) для эквивалентной дуги $<1,3>$ (Рис. 1) при $s = 0$, получим

$$D[Y] = \mu_{2E} - (\mu_{1E})^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}[M_E(s)]\Big|_{s=0} - \left(\frac{\partial}{\partial s}[M_E(s)]\Big|_{s=0}\right)^2 = M_2(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_1(s) +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s) + M_1(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_2(s) - \left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2 - 2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s) -$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}M_1(s) - \left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2}M_2(s) - \left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2 = D[X_1] + D[X_2]$$

Получены формулы (6), (7) вычисления математического ожидания и дисперсии на основе эквивалентного преобразования последовательных дуг GERT-сети.

Рассмотрим простую GERT-сеть (Рис. 2) с двумя параллельными дугами, описываемыми случайными величинами X_1 и X_2 и соответствующими вероятностями p_1 и p_2.

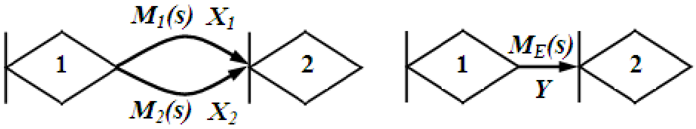

Рис. 2. Параллельные дуги и их эквивалентное представление

Аналитически вычисляя частную производную (1) по производящей функции моментов (4) для эквивалентной дуги $<1,2>$ (Рис. 2) при $s=0$, получим

$$M[Y]=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{p_1M_1(s)+p_2M_2(s)}{p_1+p_2}\right]\Bigg|_{s=0}=\frac{p_1\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)+p_2\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)}{p_1+p_2}=\frac{p_1M[X_1]+p_2M[X_2]}{p_1+p_2}$$

Аналитически вычисляя частные производные (2) по производящей функции моментов (4) для эквивалентной дуги $<1,2>$ (Рис. 2) при $s=0$, получим

$$D[Y]=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\frac{p_1M_1(s)+p_2M_2(s)}{p_1+p_2}\right]\Bigg|_{s=0}-\left(\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{p_1M_1(s)+p_2M_2(s)}{p_1+p_2}\right]\Bigg|_{s=0}\right)^2=$$

$$=\frac{p_1(p_1+p_2)\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_1(s)-p_1(p_1+p_2)\left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2-2p_1p_2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)}{(p_1+p_2)^2}+$$

$$+\frac{p_1p_2\left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2+p_2(p_1+p_2)\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_2(s)-p_2(p_1+p_2)\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2+p_1p_2\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2}{(p_1+p_2)^2}=$$

$$=\frac{p_1D[X_1]+p_2D[X_2]}{p_1+p_2}+\frac{p_1p_2(M[X_1]-M[X_2])^2}{(p_1+p_2)^2}$$

Получены формулы вычисления математического ожидания (8) и дисперсии (9) на основе эквивалентного преобразования параллельных дуг GERT-сети.

Рассмотрим простую GERT-сеть (Рис. 3) с дугой и петлей, описываемыми случайными величинами X_1 и X_2 и соответствующими вероятностями p_1 и p_2.

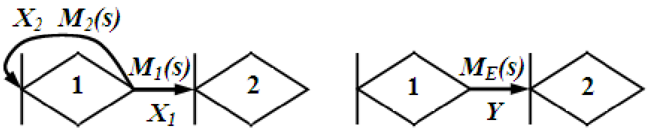

Рис. 3. Сеть с петлей и ее эквивалентное представление

Аналитически вычисляя частную производную (1) по производящей функции моментов (5) для эквивалентной дуги $<1,2>$ (Рис. 3) при $s=0$, получим

$$M[Y]=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(1-p_2)M_1(s)}{1-p_2M_2(s)}\right]\Bigg|_{s=0}=\frac{(1-p_2)\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)(1-p_2M_2(s))-(1-p_2)M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}[1-p_2M_2(s)]}{(1-p_2M_2(s))^2}=$$

$$=M[X_1]+\frac{p_2}{1-p_2}M[X_2]$$

Аналитически вычисляя частные производные (2) по производящей функции моментов (5) для эквивалентной дуги $<1,2>$ (Рис. 3) при $s=0$, получим

$$D[Y]=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\frac{(1-p_2)M_1(s)}{1-p_2M_2(s)}\right]\Big\|_{s=0}-\left(\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(1-p_2)M_1(s)}{1-p_2M_2(s)}\right]\Big\|_{s=0}\right)^2=\frac{(1-p_2)^3\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_1(s)(1-p_2M_2(s))}{\left(1-p_2M_2(s)\right)^4}+$$

$$+\frac{-(1-p_2)^3\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)p_2\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)+(1-p_2)^3\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)p_2\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)+(1-p_2)^3M_1(s)p_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial s}M_2(s)}{\left(1-p_2M_2(s)\right)^4}-$$

$$-\frac{\left((1-p_2)^2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)+(1-p_2)M_1(s)p_2\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)\times\left(-2p_2\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)+p_2{}^2\frac{\partial}{\partial s}\left[M_2(s)\right]^2\right)}{\left(1-p_2M_2(s)\right)^4}-$$

$$-\frac{(1-p_2)^4\left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2+2(1-p_2)^3p_2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)+(1-p_2)^2p_2{}^2\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2}{\left(1-p_2M_2(s)\right)^4}=$$

$$=\frac{(1-p_2)^4\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_1(s)-\left(\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\right)^2\right)+(1-p_2)^3p_2\frac{\partial^2}{\partial s^2}M_2(s)+2p_2{}^2(1-p_2)\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2}{\left(1-p_2\right)^4}-$$

$$-\frac{2p_2{}^3(1-p_2)\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2+(1-p_2)^2p_2{}^2\left(\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)\right)^2+(1-p_2)^2p_2{}^2\frac{\partial}{\partial s}M_2{}^2(s)\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)}{\left(1-p_2\right)^4}+$$

$$+\frac{2p_2(1-p_2)^2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)-2(1-p_2)^3p_2\frac{\partial}{\partial s}M_1(s)\frac{\partial}{\partial s}M_2(s)}{\left(1-p_2\right)^4}=$$

$$=D[X_1]+\frac{p_2}{1-p_2}D[X_2]+\frac{p_2}{(p_2-1)^2}(M[X_2])^2$$

Получены формулы вычисления математического ожидания (10) и дисперсии (11) на основе эквивалентного преобразования дуги и петли GERT-сети.

Значения вероятностей в знаменателе формул (8) и (9) для параллельных дуг не приведены к 1 ($p_1+p_2=1$ для двух дуг) для обобщённого случая, когда из узла 1 (Рис. 2) выходит 3 и более дуги. Значения вероятностей в знаменателе формул (10) и (11) не приведены к p1 ($p_1=1-p_2$) для обобщённого случая, когда из узла 1 (Рис. 3) выходит более одной дуги. Тогда формулы (10) и (11) справедливы для случая с несколькими дугами и петлёй, эквивалентное преобразование заключается в преобразовании петли с каждой из этих дуг.

Таким образом, получены аналитические формулы нахождения числовых характеристик GERT-сети без использования топологического уравнения Мейсона.

Алгоритм преобразования GERT-сети к эквивалентной дуге

Алгоритм преобразования однородной GERT-сети к эквивалентной дуге основан на поиске участков сети с тремя типами расположения дуг: последовательные дуги, параллельные дуги, дуга и петля, и их замене на эквивалентную дугу с пересчетом математического ожидания и дисперсии.

Пусть GERT-сеть имеет один источник или приведена к сети с одним источником, и имеет m стоков, тогда алгоритм преобразования однородной GERT-сети должен позволять получать m эквивалентных дуг с числовыми характеристиками по каждому стоку сети.

Структуру GERT-сети G отобразим в матрице смежности $A(G)$ с n вершинами. Каждый элемент матрицы a_{ij}, для которого $a_{ij}=1$, содержит вероятность p_{ij} выполнения дуги $<i,j>$ (i – номер строки, j – номер столбца, $i,j=\overline{1,n}$) и значения математического ожидания $M[X_{ij}]$ и дисперсии $D[X_{ij}]$.

Поскольку при преобразовании (топологическом упрощении) GERT-сети за один шаг могут вновь образовываться некоторые из типов расположения дуг (например, после преобразования петли могут образоваться последовательные дуги), то алгоритм является итеративным и включает следующие шаги.

Шаг 1. Ищутся простые петли GERT-сети – дуга $<v_k,v_k>$. Поиск осуществляется по диагонали матрицы $A_l(G_l)$ путем нахождения элементов $a_{ij}{}^{l}=1$, для которых $i=j$, где l – шаг алгоритма, $l\in N$ (для первого выполнения Шага 1 $l=1$). Далее находятся все дуги $<v_k,v_j>$, $j=\overline{1,n}$ (элемент $a_{kj}{}^{1}=1$), и по формулам (10, 11) пересчитывается математическое ожидание $M[X_{kj}]$ и дисперсия $D[X_{kj}]$ данных дуг. После этого дуга $<v_k,v_k>$ исключается из GERT-сети, а соответствующий элемент матрицы $A_1(G_1)$ становится равным нулю ($a_{kk}{}^{1}=0$).

После нахождения всех простых петель и их исключения, получим эквивалентную GERT-сеть G_2 и соответствующую матрицу $A_2(G_2)$.

На данном шаге ищутся все простые петли GERT-сети и исключаются с пересчетом числовых характеристик соответствующих дуг, тем самым уменьшается топологическая сложность GERT-сети, поскольку уменьшается количество петель r-ых порядков.

Шаг 2. Ищутся последовательные дуги GERT-сети. Последовательными дугами являются дуги $<v_i,v_j>$ и $<v_j,v_k>$, для которых $i,j,k=\overline{1,n}$, при этом узел v_j должен иметь только одну входящую дугу из узла v_i, и только одну исходящую дугу в узел v_k. То есть элементы матрицы $A_2(G_2)$ $a_{ij}{}^{2}=1$, $a_{jk}{}^{2}=1$, при этом $a_{qj}{}^{2}=0$ и $a_{jt}{}^{2}=0$, где $q,t=\overline{1,n}$ и $q\neq i, t\neq k$.

По формулам (6, 7) пересчитывается математическое ожидание $M[X_{ik}]$ и дисперсия $D[X_{ik}]$ эквивалентной дуги $<v_i,v_k>$. Элемент матрицы $A_2(G_2)$ становится равным $a_{ik}{}^{2}=1$. Узел v_j исключается из GERT-сети, в матрице $A_2(G_2)$ исключается строка j и столбец j, тем самым, размерность матрицы $A_2(G_2)$ уменьшается на единицу.

При преобразовании последовательных дуг GERT-сети могут образовываться участки сети с параллельными дугами. Если при преобразовании дуг $<v_i,v_j>$ и $<v_j,v_k>$ элемент матрицы уже равен единице ($a_{ik}{}^{2}=1$), то значения полученных числовых характеристик ($a_{ik}{}^{2^*}$) необходимо пересчитать по формулам (8, 9) с характеристиками имеющейся параллельной дуги ($a_{ik}{}^{2}$) и заменить их одной эквивалентной.

После нахождения всех последовательных и параллельных дуг и их замене на эквивалентные дуги, получим эквивалентную GERT-сеть G_3 и соответствующую матрицу $A_3(G_3)$.

Условие 1. Если количество узлов GERT-сети равно количеству стоков плюс единица, то GERT-сеть преобразована к эквивалентной сети. Если размерность матрицы Al(Gl) равна $n=m+1$, где m – количество стоков, то алгоритм заканчивается.

Условие 2. Если размерность матрицы Al(Gl) уменьшилась после выполнения Шага 2 ($n_l>n_{l+1}$), то необходимо проверить GERT-сеть на появление простых петель –

дуги типа $< v_k, v_k >$ (переход к Шагу 1), иначе в GERT-сети существует не простая петля, состоящая из нескольких дуг (переход к Шагу 3).

Шаг 3. Ищется узел, в который входит одна дуга, а выходит две или более дуги. Дублируется данный узел с сохранением выходных дуг и копированием входных дуг на каждый продублированный узел.

Узел v_j ищется подобно тому, как ищутся последовательные дуги $< v_i, v_j >$ и $< v_j, v_k >$ на Шаге 2, при этом $a_{qj}{}^3 = 0$, где $q = \overline{1,n}$ и $q \neq i$, а количество элементов $a_{jt}{}^3 = 1$ больше одного, где $t = \overline{1,n}$. Для каждой дуги $< v_j, v_t >$, для которой $t \neq k$, создается узел $v_j{}^t$, в который входит дуга $< v_i, v_j{}^t >$, и выходит дуга $< v_j{}^t, v_t >$. Соответствующие элементы матрицы $A_3(G_3)$ устанавливаются равными единице $a_{ij^t}{}^3 = 1$, $a_{j^t t}{}^3 = 1$. Размерность матрицы $A_3(G_3)$ увеличивается на данном шаге.

Условие 3. Если на шаге 3 не найден ни один узел, в который входит одна дуга, а выходит две или более дуги, то переходим к Шагу 4, иначе, поскольку появляются последовательные дуги, переходим к Шагу 2.

Шаг 4.Ищется узел, в который входит и выходит более чем по одной дуге. Данный узел дублируется по количеству входящих дуг с копированием выходных дуг на каждый продублированный узел так, чтобы в каждую копию узла входила бы только одна дуга.

Ищется узел v_j, для которого количество элементов $a_{qj}{}^4 = 1$ и $a_{jt}{}^4 = 1$ больше одного, где $q = \overline{1,n}$ и $q \neq j$, $t = \overline{1,n}$ и $t \neq j$. Для каждой дуги $< v_q, v_j >$, создается узел $v_j{}^q$, в который входит дуга $< v_q, v_j{}^q >$, и выходят дуги $< v_j{}^q, v_{j+1} >$, …, $< v_j{}^q, v_t >$. Соответствующие элементы матрицы A4(G4) устанавливаются равными единице $a_{qj^q}{}^4 = 1$, $a_{j^q j+1}{}^4 = 1$, …, $a_{j^q t}{}^4 = 1$. Вероятность и числовые характеристики дуги $< v_q, v_j{}^q >$ берутся из дуги $< v_q, v_j >$. Вероятность и числовые характеристики дуг $< v_j{}^q, v_{j+1} >$, …, $< v_j{}^q, v_t >$ берутся из соответствующих дуг $< v_j, v_{j+1} >$, …, $< v_j, v_t >$.

Узел v_j исключается из GERT-сети, в матрице $A_4(G_4)$ исключается строка *j* и столбец *j*. Поскольку на шаге 4 появляются узлы, в которые входит одна дуга, а выходит две или более дуги, то переходим к Шагу 3.

Общий ход алгоритма преобразования однородной GERT-сети к эквивалентной дуге представлен на Рис. 4.

Таким образом, предложен алгоритм преобразования однородной GERT-сети большой размерности к эквивалентной дуге с помощью формул (6-11). Преобразовывая GERT-сеть на основе данного алгоритма, используя в формулах числовые характеристики дуг, можно получить аналитические формулы числовых характеристик GERT-сети.

Следует отметить, что по сравнению с диссертацией Шибанова [5], в которой разработаны численные методы нахождения плотности распределения времени прохождения GERT-сети, разработан аналитический метод расчета числовых характеристик, в частности математического ожидания и дисперсии, GERT-сети на основе эквивалентных преобразований с меньшей трудоёмкостью без использования топологического уравнения Мейсона.

На Рис. 5 представлена однородная GERT-сеть, состоящая из пяти узлов, и включающая петли 1, 2 и 3-го порядков.

В таблице 1 представлены параметры GERT-сети (Рис. 5). В таблице 2 представлены значения математического ожидания и дисперсии GERT-сети (Рис. 5), рассчитанные на основе разработанного метода, рассчитанные на основе уравнения Мейсона, рассчитанные при помощи имитационного эксперимента в программном продукте AnyLogic.

Таким образом, на основе результатов расчётов (Таблица 2), можно сделать вывод об адекватности полученных формул нахождения числовых характеристик GERT-сети и алгоритма эквивалентных преобразований, по сравнению с известными методами.

Предложенный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с имитационным экспериментом – меньшая вычислительная трудоёмкость и получение более точного результата, не зависящего от выполнения эксперимента.

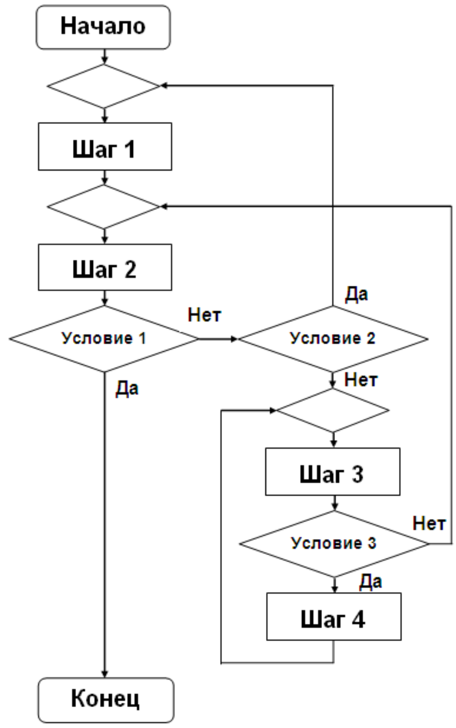

Рис. 4. Схема алгоритма преобразования однородной GERT-сети

Пример оценки числовых характеристик GERT-сети

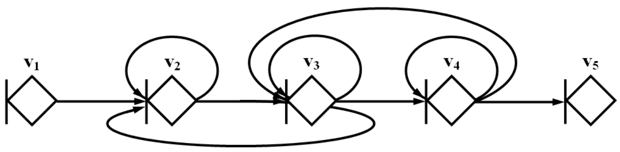

Рис. 5. Однородная GERT-сеть

Таблица 1

Параметры GERT-сети

Дуга<i, j>	*pij*	*M[Xij]*	*D[Xij]*	*Mij(s)*
<v_1, v_2>	*1*	*19*	*0*	$\exp(19s)$ - стат.
<v2, v2>	*0,1*	*150*	*50*	$\exp(150s + 25s^2)$ - норм.
<v2, v3>	*0,9*	*225*	*30*	$\exp(225s + 15s^2)$ - норм.
<v3, v2>	*0,05*	*5*	*2,5*	$(1 - 0.5s)^{-10}$ - гамма
<v3, v3>	*0,1*	*2*	*4*	$(1 - s/0.5)^{-1}$ - экспоненц.
<v3, v4>	*0,85*	*186*	*28*	$\exp(186s + 14s^2)$ - норм.
<v4, v3>	*0,025*	*5*	*25*	$(1 - s/0.2)^{-1}$ - экспоненц.
<v4, v4>	*0,05*	*10*	*1*	$\exp(10s + 0.5s^2)$ - норм.
<v4, v5>	*0,925*	*33*	*12*	$\exp(33s + 6s^2)$ - норм.

Таблица 2

Результаты расчета GERT-сети

Метод расчета	Мат. ожидание	Дисперсия
Эквивалентные преобразования по формулам (6-11)	500,265	8109,238
На основе уравнения Мейсона	500,513	8111,724
Имитационный эксперимент в AnyLogic	500,498	8114,046

Заключение

Таким образом, предложен метод оценки числовых характеристик однородной GERT-сети, в частности математического ожидания и дисперсии, основанный на преобразовании GERT-сети к эквивалентной дуге с пересчётом числовых характеристик случайных величин дуг по предложенным формулам (6-11). Предложен итеративный алгоритм эквивалентных преобразований GERT-сети.

Перспективой развития данной работы может быть проверка чувствительности центральных моментов к различным параметрам GERT-сети (вероятности дуг, законы и параметры распределения случайных величин дуг) с выходом на рекомендации по оптимизации модели в целом.

Литература

1. *Golenko-Ginzburg D.* Stochastic network models in innovative projecting. – Voronezh: Science Book Publishing House, 2011. – 356 p.

2. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. –М.: Мир, 1984. – 496 с.

3. *Neumann K.* Stochastic project networks: temporal analysis, scheduling and cost minimization. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 238 с.

4. *Pritsker A.A.* B. GERT: graphical evaluation and review technique. RAND Corporation, 1966.

5. *Шибанов А.П.* Обобщенные GERT-сети для моделирования протоколов, алгоритмов и программ телекоммуникационных систем: дис… д-ра техн. наук: 05.13.13. – Рязань, 2003. – 265 с.

6. *Зырянов А.А., Доррер М.Г.* Прогноз динамики событийных моделей бизнес-процессов на основе GERT-сетей // Информатизация и связь. 2012. №7. С. 124-127.

7. *Зырянов А.А., Доррер М.Г.* Алгоритм трансляции модели бизнес-процессов в модель GERT-сети // Вестник КрасГАУ. – Красноярск: КрасГАУ, 2012. №12. С. 13-18.

8. *Шибанов А.П.* Нахождение плотности распределения времени исполнения GERT-сети на основе эквивалентных упрощающих преобразований // Автоматика и телемеханика. 2003. №2. С. 117-126.

9. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и её инженерные приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Академия, 2003. – 464 с.

EvaluationofnumericalcharacteristicsGERT-networkbasedonequivalenttransformation

MikhailGeorgievichDorrer, Ph.D. inTechnical Science, Assistant Professor
Siberian Federal University.

Anton Alexandrovich Zyryanov, Postgraduate student,
Siberian State Technological University.

The analytical method of evaluation of the numerical characteristics of GERT-homogeneous networks such as the mean and variance. The method is based on the transformation of GERT-network to an equivalent arc with the conversion of numerical characteristics of random variables of the arcs on the proposed formulas.

Keywords: GERT, stochastic networks, business process, equivalent transformation.